数理解析研究所講究録
1173 巻 2000 年 98-112

Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture

伊吹山知義 (Tomoyoshi Ibukiyama) 大阪大学理学研究科
林田秀一 (Syuichi Hayashida) 大阪大学理学研究科

平成 12 年 7 月 28 日

1 序

本稿では、主として次の事柄について述べる。

- $Sp(2,\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(4)$ に関する 半整数ウェイトのジーゲル保型形式全体の構造を記述する。

- その部分空間で plus space と呼ばれる、いわば new forms にあたる部分の構造もあきらかにする。

- plus space は $Sp(2,\mathbb{Z})$ の index 1 のヤコービ形式と Hecke algebra module として同型である。従って index 1 の正則ヤコービ形式の構造もわかったことになる。

- さらに plus space への lifting の予想を述べる。すなわち、k を偶数とし、$SL_2(\mathbb{Z})$ のそれぞれウェイト $2k-2$ と ウェイト $2k-4$ のカスプ形式 f, g があるとき、plus space 内のジーゲル保型形式 F で、$L(s,F)=L(s,f)L(s-1,g)$ という L 関数の間の関係 を満たすものが存在するであろう。

なお、だいぶ以前に谷川好男氏が、[10] において半整数ウェイトの Maass space というものを定義して、その L 関数を lifting により説明しているが、われわれの予想はそれとは全く異なる。実際には我々の実験した範囲では、谷川氏の述べた Maass space に属するカスプ形式は見つかって

いない。また、２次のジーゲル保型形式は Ihara-Langlands 予想によれば、unitary symplectic group ($Sp(2,\mathbb{R})$ のコンパクト実形）の保型形式（球関数）と関係があるはずであり、またこれとは別に、適当な離散群について、このコンパクト実形の保型形式と半整数ウェイトのジーゲル保型形式に L 関数をたもつ対応があることは（今の場合と違ってレベルつきではあるが）Ibukiyama [7] に示してある。これらの対応や予想を通して考えれば、上の予想は（行列式部分が整数ウェイトの）ベクトル値ジーゲル保型形式への２つの１変数保型形式からの Yoshida lifting ([13], [2] など) とかたちは同じであることが見て取れる。しかし Yoshida lifting はレベルのある場合の理論であって、上のような full modular case には直接的には適用できないし、実験上も full modular の整数ウェイトベクトル値ジーゲル保型形式への Yoshida type のリフティング予想は、あまり精密かつ明快に与えることができないように思う。この意味から、実はわれわれの予想は、かなり都合の良い場所を上手に切り取った、ほどよい予想になっている可能性があるのかもしれない。なお、[3] などとどう関係するのかなどはよくわかっていない。

最後の予想の根拠はオイラー因子の数値実験（および関数等式）に、その根拠があり、plus space の構造定理はそのためにも必要であった。その他、plus space とヤコービ形式の対応を知られているものより若干拡張した。（指標がつく場合や、正則でない歪正則ヤコービ形式の場合である。）また、次数２の半整数ウェイトのジーゲル保型形式について、Siegel Φ operator とのヘッケ環の作用の交換関係を調べ、その結果、F がカスプ形式でないとき $L(s,F)$ を $\Phi(F)$ で記述した。

以下、これらについて、講演の際には時間の関係で述べられなかった多少細かいデータも付け加えて、順に述べる。

2 半整数ウェイトジーゲル保型形式の構造

一般に自然数 N について、行列サイズ $2n$ のジーゲルモジュラー群 $Sp(2,\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0^{(n)}(N)$ を

$$\Gamma_0^{(n)}(N) = \{g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z});\ C \equiv 0 \bmod N\}$$

で定義する。また、$H_n = \{\tau = {}^t\tau \in M_n(\mathbb{C});\ Im(Z) > 0\}$ をジーゲル上半空間とする。さて、半整数ウェイトジーゲル保型形式の定義を述べよ

う。H_n 上の標準的なテータ関数

$$\theta(\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i\, {}^t n \tau n}$$

をとる。$\gamma \in \Gamma_0^n(4)$ について

$$\psi(\gamma) = \left(\frac{-1}{\det(D)}\right)$$

とおくと、ψ は $\Gamma_0(4)$ の指標になり、

$$\frac{\theta(\gamma\tau)}{\theta(\tau)} = \psi(\gamma)\det(C\tau + D)$$

であることが知られている。さて、$\Gamma_0(4)$ の（1次）指標 χ をとる。自然数 k について、$\Gamma_0(4)$ のウェイト $k - 1/2$、指標 χ のジーゲル保型形式 $F(\tau)$ というのは、H 上の正則関数であり、任意の $\gamma \in \Gamma_0(4)$ について

$$F(\gamma\tau) = \chi(\gamma)\left(\frac{\theta(\gamma\tau)}{\theta(\tau)}\right)^{2k-1} F(\tau)$$

であり、かつすべてのカスプで正則であるものである。このような正則保型形式の空間を $A_{k-1/2}(\Gamma_0(4), \chi)$ と書く。χ が単位指標の時は略して $A_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ と書く。カスプ形式（各カスプで消える正則保型形式）の空間は $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4), \chi)$ などと書くことにする。また普通の整数ウェイトの保型形式の空間も $A_k(\Gamma_0(4), \chi)$ というように書く。$n = 2$ で χ が単位指標か、または ψ の時には対馬龍司氏によりこのような空間の次元公式が知られている。

Proposition 2.1 ([11])

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim A_{k+1/2}(\Gamma_0(4))t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \dim A_k(\Gamma_0(4))t^k = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)}.$$

整数ウェイトの部分は Igusa によってもわかる。

さて、$n = 2$ のときに、これらを具体的に記述するためにまず theta constant の説明する。$m = (m', m'')$ (m', $m'' \in \mathbb{Z}^n$) と $(\tau, z) \in H_n \times \mathbb{C}^n$ に対して

$$\theta_m(\tau) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} e(\frac{1}{2}\,{}^t(p + m'/2)\tau(p + m'/2) + {}^t(p + m'/2)(z + m''/2))$$

とおく。さらに $\theta_m(\tau)=\theta_m(\tau,0)$ と書く。この記号ではたとえば $\theta(\tau)=\theta_0(2\tau)$ (0 は $\mathbb{Z}^{2n}$ のゼロベクトル) である。

以下、しばらく $n=2$ の場合のみを考えよう。次のようにおく。

$$
\begin{aligned}
f_1(\tau) &= (\theta_{0000}(\tau))^2,\\
X(\tau) &= (\theta_{0000}(\tau)^4+\theta_{0001}(\tau)^4+\theta_{0010}(\tau)^4+\theta_{0011}(\tau)^4)/4,\\
g_2 &= (\theta_{0000}(\tau)^4+\theta_{0100}(\tau)^4+\theta_{1000}(\tau)^4+\theta_{1100}(\tau)^4),\\
f_3 &= (\theta_{0001}(\tau)\theta_{0010}(\tau)\theta_{0011}(\tau))^2
\end{aligned}
$$

また、$F_1(\tau)=f_1(2\tau)$, $G_2(\tau)=g_2(2\tau)$, $X_2(\tau)=X(2\tau)$, $F_3(\tau)=f_3(2\tau)$ とおく。

Theorem 2.2 F_1, G_2, X_2, F_3 はそれぞれウェイトが *1, 2, 2, 3* の、互いに代数的独立な $\Gamma_0(4)$ の正則保型形式で、

$$\oplus_{k=0}^{\infty}A_k(\Gamma_0(4),\psi^k)=\mathbb{C}[F_1,G_2,X_2,F_3]$$

となる。また

$$\oplus_{k=0}^{\infty}A_{k+1/2}(\Gamma_0(4))=\theta\mathbb{C}[F_1,G_2,X_2,F_3]$$

となる。このうちカスプ形式は $\mathbb{C}[F_1,G_2,X_2,F_3]$ 加群として、ウェイトが *11/2, 11/2, 13/2, 13/2* の以下のように定義された保型形式 *(カスプ形式)* A, B, C, D で張られる。

$$
\begin{aligned}
A &= \theta(9F_3^2-F_1^2(4G_2X_2-6F_1^2G_2+24F_1^2X_2+G_2^2-32X_2^2)-9F_1F_3(4X_2-2F_1^2)),\\
B &= \theta F_3(3F_1^2-2X_2-G_2)\\
C &= \theta(G_2-4X_2)(-3F_3+F_1(G_2+8X_2-6F_1^2))\\
D &= \theta(8X_2+G_2-6F_1^2)(G_2-4X_2)(3F_1^2-2X_2-G_2)
\end{aligned}
$$

この定理の後半は、実は対馬の次元公式を仮定せずに、関数論的に直接証明することもできる。ちなみにカスプ形式の次元は

$$\dim S_{k+1/2}(\Gamma_0(4))=\frac{2t^5+2t^6-t^7-2t^8-t^9+t^{10}}{(1-t)(1-t^2)^2(1-t^3)}$$

となる。指標つきの半整数ウェイト保型形式についても同様にもとまる。

Theorem 2.3 保型形式 $F_{21/2} \in A_{21/2}(\Gamma_0(4), \psi)$ が定数倍をのぞき一意的に存在して

$$\oplus_{k=0}^{\infty} A_{k+1/2}(\Gamma_0(4), \psi) = F_{21/2}\mathbb{C}[F_1, G_2, X_2, F_3]$$

となる。これらはすべてカスプ形式である。

ここで、$F_{21/2}$ はたとえば、

$$\begin{aligned} f_{21/2} &= (\theta_{0001}\theta_{0010}\theta_{0011}\theta_{0100}\theta_{0110}\theta_{1000}\theta_{1001}\theta_{1100}\theta_{1111}) \\ &\quad \times(\theta_{0001}^4 - \theta_{0010}^4)(\theta_{0001}^4 - \theta_{0011}^4)(\theta_{0010}^4 - \theta_{0011}^4) \end{aligned}$$

とするとき、$F_{21/2} = f_{21/2}(2\tau)$ と書ける。

3 plus space とヤコービ形式

まず、一般次数のヤコービ形式の定義を述べ、半整数ウェイトの保型形式との関わりを述べる。ここでは index が 1 のもののみについて定義を述べよう。自然数 n, k をとる。$(\tau, z) \in H_n \times \mathbb{C}^n$ の正則関数 $F(\tau, z)$ は次を満たすとき、$Sp(n, \mathbb{Z})$ に属する weight k, index 1 のヤコービ形式という。

1. 任意の $x, y \in \mathbb{Z}^n$ について
$$F(\tau, z + x\tau + y) = e(-({}^t x\tau x + 2{}^t xz))F(\tau, z).$$
となる。
2. 任意の $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sp(n, \mathbb{Z})$ について、
$$F(g\tau, {}^t(c\tau + d)^{-1}z) = J_k(g, \tau)e({}^t z(c\tau + d)^{-1}cz)F(\tau, z)$$
となる。ただし $J_k(g, \tau) = \det(c\tau + d)^k$ とおいた。
3. 上の条件より、$F(\tau, z)$ のフーリエ展開を考える。
$$F(\tau, z) = \sum_{N, r} a(N, r)e(tr(N\tau + {}^t rz)).$$
ただし、N は半整数対称行列をうごき、r は $\mathbb{Z}^n$ を動く。このとき、$a(N, r) \neq 0$ となるのは $N - r{}^t r/4$ が半正定値対称行列の時に限る。

以上のようなヤコービ形式の空間を $J_{k,m}$ と書こう。とくにフーリエ展開の条件で $N - r\,{}^t r/4$ が正定値のとき以外はフーリエ係数が消えるものをヤコービカスプ形式といい、この空間を $J_{k,m}^{cusp}$ と書く。これと良く似た正則でない skew holomorphic Jacobi 形式と呼ばれる空間が $n = 1$ のときに Skoruppa により導入され、Arakawa により一般次数に拡張された。すなわち、$H_n \times \mathbb{C}^n$ 上の (正則でない) 関数 $F(\tau, z)$ が、まえの条件のうち（1）をみたし、さらに（2）の条件で $J_k(g, \tau)$ のかわりに $\overline{\det(c\tau+d)}^{k-1}|\det(c\tau+d)|$ とした式が成立し、これらの条件から決まる自然なフーリエ展開

$$F(\tau, z) = \sum_{N,r} a(N, r)e(tr(N\bar{\tau} + \frac{i}{2}r\,{}^t r y)e({}^r rz)$$

(y は τ の虚部) において、$N - {}^t rr/4$ が半負定値のとき以外はフーリエ係数が消えるものを、ウェイト k、index 1 の歪正則ヤコービ形式 (skew holomorphic Jacobi form) といい、この空間を $J_{k,1}^{skew}$ と書く。負定値のとき以外はフーリエ係数が消えるものを歪正則ヤコービカスプ形式という。

これらと半整数ウェイト保型形式の対応を記述するために、$\Gamma_0(4)$ の半整数ウェイトの保型形式のうちの、いわばレベル 1 の部分に相当する plus space の定義を述べる。半整数ウェイトの正則保型形式のフーリエ展開は次で与えられる。

$$f(\tau) = \sum_N c(N)e(tr(N\tau)).$$

(ここで N は半整数対称行列を渉り、N が半正定値でなければ $c(N) = 0$ となる。)

Definition 3.1 $l = 0$ または 1 とする。
$f(\tau) \in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4), \psi^l)$ のフーリエ係数について、

- $c(N) \neq 0$ ならば、ある列ベクトル $\mu \in \mathbb{Z}^n$ で $N + (-1)^{k+l}\mu\,{}^t\mu$ が半整数対称行列の 4 倍になるものが存在する

という条件を満たす f の全体を $M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4), \psi^l)$ と書き、*plus space* と呼ぶ。

次の定理は、$n = 1$ は Kohnen [9], Eichler-Zagier [4], n 一般で $l = 0$ のときは、Ibukiyama [5] による。ただし、$l = 1$ すなわち k が奇数で指標付きの部分については今回新たに付け加えたものである。

Theorem 3.2 $l+k$ が偶数と仮定すると、ヘッケ作用素の作用をこめて、

$$M^{+}_{k-1/2}(\Gamma_0(4), \psi^{l}) \cong J_{k,1}$$

である。

ここで、両者のヘッケ作用素の具体的な対応関係は省略する。(cf. [8])
また歪正則な場合についても次がわかる。

Theorem 3.3 *(Hayashida)* $l+k$ が奇数のとき、

$$M^{+}_{k-1/2}(\Gamma_0(4), \psi^{l}) \cong J^{skew}_{k,1}$$

である。

以上で、実際の同型写像は具体的には次のように与えられる。$\mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n$ の代表 μ に対して

$$\vartheta_\mu(\tau, z) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^n} e({}^t(p+\mu/2)\tau(p+\mu/2) + {}^t(2p+\mu)z)$$

と置くとき、$F \in J_{k,1}$ または $F \in J^{skew}_{k,1}$ について、

$$F(\tau, z) = \sum_{\mu\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} F_\mu(\tau)\vartheta_\mu(\tau, z)$$

となる $\tau \in H_n$ の関数 $F_\mu(\tau)$ の組が一意的に存在する。$F \in J_{k,1}$ ならば

$$\sigma(F) = \sum_{\mu\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} F_\mu(4\tau),$$

また $F \in J^{skew}_{k,1}$ ならば

$$\sigma(F) = \sum_{\mu\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} F_\mu(-4\bar{\tau})$$

とおくと、これが上の定理で述べた同型写像を具体的に与えている。

4 plus space の構造

以下、本稿の終わりまで、$n=2$ と仮定する。$Sp(2,\mathbb{Z})$ の index 1 の正則ヤコービ形式の次元は Tsushima [12] により計算されている。実際

Proposition 4.1

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim J_{k,1} t^k = \frac{t^4+t^6+t^{10}+t^{12}+t^{21}+t^{27}+t^{29}+t^{35}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})}$$

である。これと前節の結果より、$k+l$ が偶数のとき、$M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^l)$（ただし $\Gamma_0(4)=\Gamma_0^{(2)}(4)$ ）の次元も求まったことになる。すなわち、上の命題の右辺は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^k) t^k$$

にも等しいわけである。これを元に $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^k)$ を具体的に決定することができる。実際ここで、

$$\mathcal{A} = \{\ f(4\tau);\ \ f(\tau) \in \oplus_{k=0}^{\infty} M_{2k}(Sp(2,\mathbb{Z}))\ \}$$

とおく。$\oplus_{k=0}^{\infty} M_{2k}(Sp(2,\mathbb{Z}))$ が、ウェイト 4, 6, 10, 12 の 4 つの代数的独立な保型形式で生成される weighted polynomial ring であることは良く知られている。よって、A も同様である。

Theorem 4.2 それぞれ $k=4,\ 6,\ 10,\ 12,\ 21,\ 25,\ 29,\ 35$ のときの $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^k)$ に属する保型形式、$P_{7/2}$, $P_{11/2}$, $P_{19/2}$, $P_{23/2}$, $P_{41/2}$, $P_{53/2}$, $P_{57/2}$, $P_{69/2}$ があって、

$$\begin{aligned} M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^k) &= \mathcal{A}\ P_{7/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{11/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{19/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{23/2} \\ &\quad \oplus \mathcal{A}\ P_{41/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{53/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{57/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{69/2}. \end{aligned}$$

となる。ここで $\oplus$ は $\mathcal{A}$ 加群としての直和という意味である。また、ここで述べた $P_{k-1/2}$ は、$k=10,\ 12,\ 21,\ 25,\ 29,\ 35$ についてはカスプ形式であり、*plus space* に属するカスプ形式は

$$\begin{aligned} S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^k) &= \mathcal{A}^{cusp}\ P_{7/2} \oplus \mathcal{A}^{cusp}\ P_{11/2} \oplus \mathcal{A}P_{19/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{23/2} \\ &\quad \oplus \mathcal{A}\ P_{41/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{53/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{57/2} \oplus \mathcal{A}\ P_{69/2}. \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、$\mathcal{A}^{cusp}$ は $\mathcal{A}$ 内のカスプ形式のなすイデアル（つまり $f(\tau) \in S_k(Sp(2,\mathbb{Z}))$ について $f(4\tau)$ で張られる空間）である。

この定理において、もちろん P の添字はウェイトをあらわし、これら8つの保型形式は、みな具体的に書き下せる。たとえば、

$$
\begin{aligned}
R &= 2(3F_1^2 - G_2 - 2X_2), \\
V &= 2(F_3 - 2F_1X_2 + F_1^3),
\end{aligned}
$$

とおけば、A, B, C, D を前に定義した半整数ウェイトのカスプ形式とするとき、

$$
\begin{aligned}
P_{7/2} &= 2\theta(-3F_1^3 + 21F_3 + 14F_1X_2), \\
P_{11/2} &= 4\theta(9F_1^5 - 264F_1^3X + 66F_1^3G_2 + 220F_1X_2^2 \\
&\quad -44F_1G_2X_2 - 11F_1G_2^2 + 396F_1^2F_3 + 396F_3X), \\
P_{19/2} &= (9VA + 9R(-2X_2 + F_1^2)B - F_1RD)/2, \\
P_{23/2} &= (18(3F_1^2 - 5X_2)V + F_1R^2/4)A \\
&\quad +((-3(9F_1^2 - 18X_2 + G_2)R/4 + 6(4X_2^2 + 5G_2X_2 - 3F_1^2G_2))RB \\
&\quad +2F_1(3F_1^2 - X_2)RD.
\end{aligned}
$$

ととれる。以上で $P_{19/2}$, $P_{23/2}$ は見てもわかるとおりカスプ形式である。これらが plus space に属するという証明は、$M_{k-1/2}(\Gamma_0(4), \psi^k)$ の生成元のフーリエ係数を計算して必要条件をだし、あとは次元公式を用いるという方法をとった。実際には、Atkin-Lehner type の involution による plus space の特徴付け（ここでは略す）を用いて、理論的に計算する方法もある。ちなみに、参考のために、これらを（実際にフーリエ係数の計算の過程で必要だった）最初の生成元で表せば次のような複雑な表示になる。

$$
\begin{aligned}
P_{19/2} &= -16\theta(-8F_1G_2^3X_2 - 486F_3^2F_1X_2 + 54F_1^3G_2^2X_2 + 12F_1G_2^2X_2^2 \\
&\quad -144F_1^3G_2X_2^2 + 112F_1G_2X_2^3 + 1188F_3F_1^2X_2^2 - 108F_1^5G_2X_2 \\
&\quad +108XF_1^2G_2F_3 - 1134F_3F_1^4X - 72G_2X_2^2F_3 - 18X_2G_2^2F_3 \\
&\quad +81F_3^3 - F_1G_2^4 + 128F_1X_2^4 + 108F_1^7G_2 - 432F_1^7X_2 \\
&\quad -54F_1^5G_2^2 + 1296F_1X^2 + 12F_1^3G_2^3 - 1056F_1^3X_2^3 \\
&\quad +243F_3^2F_1^3 + 243F_3F_1^6 - 72X_2^3F_3)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
P_{23/2} = \ & 16\theta(25560F_3F_1^4X_2^2 - 3536F_1^3G_2X_2^3 - 348F_1^3G_2^2X_2^2 + 11F_1^3G_2^4 \\
& +8192F_1^3X_2^4 + 54F_1^9G_2 - 216F_1^9X_2 + 387F_1^7G_2^2 \\
& +5760F_1^7X_2^2 - 132F_1^5G_2^3 - 13728F_1^5X_2^3 + 1377F_3F_1^8 \\
& +3F_3G_2^4 - 240F_3X_2^4 + 1584F_3F_1^2G_2X_2^2 + 180F_3F_1^2G_2^2X_2 \\
& -2520F_3F_1^4G_2X_2 + 36F_1F_3^2G_2X_2 + 136F_1^3G_2^3X_2 - 2988F_1^7G_2X_2 \\
& -180F_1^5G_2^2X_2 + 6264F_1^5G_2X_2^2 + 864F_3F_1^6G_2 - 11232F_3F_1^6X_2 \\
& -36F_3F_1^4G_2^2 - 36F_3F_1^2G_2^3 - 17280F_3F_1^2X_2^3 + 24F_3G_2^3X_2 \\
& -192F_3G_2X_2^3 - 4G_2^4F_1X_2 - 32F_1G_2^3X_2^2 + 48F_1G_2^2X_2^3 \\
& +448F_1G_2X_2^4 - 54F_1^3F_3^2G_2 - 10800F_1^3F_3^2X_2 + 9F_1F_3^2G_2^2 \\
& +9756F_1F_3^2X_2^2 + 512F_1X_2^5 + 2997F_1^5F_3^2 + 972F_1^2F_3^3 \\
& -1620X_2F_3^3
\end{aligned}$$

もちろんこれらの見かけが複雑なのは生成元の取り方から来る単なる偶然であって違う生成元をとると若干単純になるが、特に表示法に意味はないのでここではこのままにしておく。$P_{41/2}$, $P_{53/2}$, $P_{59/2}$, $P_{69/2}$ の正確な定義は、もっと複雑になるのでここでは省略する。

ちなみに、$k+l$ が奇数の場合の plus space の構造はある程度予想はできるが、skew holomorphic Jacobi forms の次元公式がないこともあって、正確にはわかっていない。

5 Euler factor の実験と予想

以下、前節と同様、$n=2$ とし、$\Gamma_0^{(2)}(4) = \Gamma_0(4)$ と書く。

半整数ウェイトの保型形式についてのヘッケ作用素の理論は、たとえば、Zhuravrev [14], Ibukiyama [7] などにある。それによれば、半整数ウェイトの場合の意味のある Hecke 作用素は$T(1,p,p^2,p)$, $T(p,p,p^3,p^3)$ (p は任意の奇素数) で生成される。これを $\mathcal{H}(\Gamma_0(4))$ と書くことにしよう。$F \in M_{k-1/2}^+(\Gamma_0(4))$ をこれらの同時固有関数とし、$T(1,p,p^2,p)$, $T(p,p,p^3,p^3)$ の固有値をそれぞれ、$\omega(p)$, $\lambda(p)$ と書く。さらに、

$$H_p(u,F) = 1 - \lambda(p)u + (p\omega(p) + p^{2k-5}(1+p^2))u^2 - \lambda(p)p^{2k-3}u^3 + p^{4k-6}u^4$$

とおくとき、F の L 関数は

$$L(s,F) = \prod_{p\,odd} H_p(p^{-s},F)$$

で定義される。(ここで $p=2$ のときは、対応する $J_{k,1}$ の作用素を引き戻せば、同様に Euler 因子を定義することが可能であるが、今は Euler 2-factor はのぞいた形で述べておこう。)

5.1 Siegel Φ operator

まず、$F \in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ がカスプ形式でないときの L 関数について考える。F をひとつのカスプにおとす Siegel Φ operator は半整数ウェイトの保型形式でも通常と同様に定義される。すなわち

$$F(\tau) = \sum_N a(N)e(\mathrm{tr}(N\tau))$$

のとき、$c(n) = a\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおけば、$\tau_1 \in H_1$ として

$$(\Phi F)(\tau_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)e(n\tau_1)$$

となる。1変数の半整数ウェイトの保型形式へのヘッケ作用素 $T(p^2)$ をこれに作用させると、定義により

$$T(p^2)(\Phi F)(\tau_1) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c(p^2n) + p^{2k-3}b(n/p) + \left(\frac{(-1)^{k+1}n}{p}\right)p^{k-2}c(n)\right)e(n\tau_1)$$

である。

Theorem 5.1 $F \in M_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ が $\mathcal{H}(\Gamma_0(4))$ の同時固有関数であるとすると、$\Phi(F)$ も $\Gamma_0^1(4)$ のウェイト $k-1/2$ の保型形式で、ヘッケ作用素 $T(p^2)$ (p は奇素数) の同時固有関数であり、$\Phi(F)$ の $T(p^2)$ での固有値を $\mu(p^2)$ とすれば、

$$L(s,F) = \prod_{p,\mathrm{odd}}(1-\mu(p^2)p^{-s}+p^{2k-3-2s})^{-1}(1-p^{-s})^{-1}(1-p^{2k-4-s})^{-1}$$

である。特に、ΦF と *Shimura* 対応する整数ウェイト $2k-2$ の保型形式 f をとると、*Euler 2 factor* を除いて

$$L(s,F) = L(s,f)\zeta(s)\zeta(s-2k+4) = L(s,f)L(s-1,E_{2k-4}).$$

ここで E_{2k-4} は $SL_2(\mathbb{Z})$ に属するウェイト $2k-4$ の1変数のアイゼンシュタイン級数である。

F がさらに plus space の元 ($M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の元) ならば、$\Phi(F)$ もそうであり、f は $SL_2(\mathbb{Z})$ の保型形式と対応している。

5.2 カスプ形式へのもちあげ

実験的な結果を述べる。これからは k が偶数の場合のみ考える。まず、$S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の次元は次の母関数で与えられる。(Tsushima [12] の $J^{cusp}_{k,1}$ に関する次元公式と Ibukiyama [8] の同型対応による。あるいは前に述べた $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^k)$ の構造定理からも得られる。)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dim S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4),\psi^k)t^k = \frac{(t^4+t^6)(t^{10}+t^{12}-t^{22})+t^{10}+t^{12}+t^{21}+t^{27}+t^{29}+t^{35}}{(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{12})}$$

次元の具体的なデータを示しておこう。

even k	0−6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$\dim S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$	0	0	1	1	2	4	4	6	9	10
$\dim S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$	0	0	1	1	1	2	2	2	3	3
$\dim S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))$	0	1	1	1	2	2	2	3	3	3

この表から小さい偶数の k につき、

$$\dim S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4)) \geq \dim S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \times \dim S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))$$

であることがみてとれるが、実際これは任意の k について正しいばかりではなく、

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\dim S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z})) \times \dim S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z})))\, t^k = \frac{(1+t^4)t^{10}}{(1-t^2)(1-t^6)^2}$$

を用いて左辺と右辺の差を計算すると、実は $\dim M^+_{k-20-1/2}(\Gamma_0(4))$ と等しくなっている。この不思議な関係式の理由はよくわからない。

さて、ウェイトが小さいところについて、Euler 3 factor を計算してみると次のようなことがわかる。Δ_k ($k = 16, 18, 20, 22, 26$) を $SL_2(\mathbb{Z})$ のウェイト k の (正規化された) カスプ形式とし、$\Delta^{\pm}_{24}$ を、$SL_2(\mathbb{Z})$ のヘッケ作用素に関するウェイト 12 の 2 つの同時固有関数とする。$\lambda(3,*)$ をこれらのヘッケ作用素 $T(3) = SL_2(\mathbb{Z}) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) SL_2(\mathbb{Z})$ での固有値とする。このとき次の結果が得られた。

1. $k=10$ のとき、$S^+_{19/2}(\Gamma_0(4))=\mathbb{C}P_{19/2}(\tau)$ であり、

$$\begin{aligned} H_3(T,P_{19/2}) &= 1+14328\,T+301308822\,T^2+1850320255464\,T^3 \\ &\quad +16677181699666569\,T^4\ . \\ &= (1+10044\,T+3^{17}\,T^2)(1+4284\,T+3^{17}\,T^2)\ . \\ \lambda(3,\Delta_{16}) &= -3348. \\ \lambda(3,\Delta_{18}) &= -4284. \end{aligned}$$

2. $k=12$ のとき、$S^+_{23/2}(\Gamma_0(4))=\mathbb{C}P_{23/2}(\tau)$ であり、

$$\begin{aligned} H_3(T,P_{23/2}) &= 1-23112\,T+1342087542\,T^2-241759683227736\,T^3 \\ &\quad +109418989131512359209\,T^4\ . \\ &= (1-151956\,T+3^{21}\,T^2)(1+128844\,T+3^{21}\,T^2)\ . \\ \lambda(3,\Delta_{20}) &= 50652\ . \\ \lambda(3,\Delta_{22}) &= -128844\ . \end{aligned}$$

3. $k=14$ のときは、$\dim S^+_{27/2}(\Gamma_0(4))=2$ である。同時固有関数は

$$\chi^{\pm}_{27/2}(\tau)=(427\pm\sqrt{144169})P_{19/2}(\tau)E_4(4\tau)+9P_{7/2}\chi_{10}(4\tau)$$

で与えられる。ただし、E_4 は定数項 1 の $Sp(2,\mathbb{Z})$ のアイゼンシュタイン級数であり、χ_{10} はウェイトが 10 の $Sp(2,\mathbb{Z})$ のカスプ形式で $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ でのフーリエ係数が 1 のものとした。このとき、

$$\begin{aligned} H_3(T,\chi^{(\pm)}_{27/2}) &= 1-216\left(1451\pm 8\sqrt{144169}\right)T \\ &\quad +\left(941431788270+5832\left(112043573\mp 58016\sqrt{144169}\right)\right)T^2 \\ &\quad -183014339639688\left(1451\pm 8\sqrt{144169}\right)T^3 \\ &\quad +717897987691852588770249\,T^4\ . \\ &= \left(1-\left(509220\pm 1728\sqrt{144169}\right)T+3^{25}\,T^2\right)\left(1+195804\,T+3^{25}\,T^2\right)\ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(3,\Delta^{(\pm)}_{24}) &= 169740\pm 576\sqrt{144169}\ . \\ \lambda(3,\Delta_{26}) &= -195804\ . \end{aligned}$$

$k=16,\ 18$ （$S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ はともに 4 次元）でも類似の実験結果が得られるが、紙数の関係で省略する。これら、および関数等式などから考えて

Conjecture 5.2 k が偶数のとき、ヘッケ作用素の２つの同時固有関数 $f \in S_{2k-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ と $g \in S_{2k-4}(SL_2(\mathbb{Z}))$ について、あるヘッケ作用素の同時固有関数 $F \in S^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ で、

$$L(s, F) = L(s, f)L(s-1, g)$$

となるものが存在するであろう。

以上で、左辺の２でのオイラー因子はあまり正確に説明しなかったが、$J_{k,1}$ との同型対応において、$J_{k,1}$ の 2 での Hecke 作用素の $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ への引き戻しをとればよいと思われる。

さて、以上のような実験は plus space 以外の $S_{k-1/2}(\Gamma_0(4))$ の元についてもおこなっているが、このばあいはやはり $f \in S_{2k-2}(\Gamma_0^{(1)}(4))$, $g \in S_{2k-4}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ の組からの持ち上げがあることを示唆する結果になっている。($\Gamma_0^{(1)}(2)$ ではなく、$\Gamma_0^{(1)}(4)$ である。) 実験例はここでは述べないが、ウェイトが 11/2, 13/2, 15/2 について、それぞれ 2, 4, 7 次元分、実験例がある。これらについては紙数の関係で省略する。詳しくは準備中の論文 [6] を参照されたい。(より詳しい文献表もそちらを参照されたい。)

参考文献

[1] T. Arakawa, Siegel's formula for Jacobi forms , International Journal of Mathematics vol 4 No 5 (1983) 683-719.

[2] S. Boecherer and R. Schulze-Pillot, Mellin transforms of vector valued theta series attached to quaternion algebras, Math. Nach. 160 (1994), 31–57.

[3] S. Boecherer, R. Schulze-Pillot and M. Furusawa, On Whittaker coefficients of some metaplectic forms, Duke Math. J. Vol. 76 No. 3 (1994), 761–772.

[4] M. Eichler and D. Zagier, Theory of Jacobi Forms , Progress in Math. 55, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1985.

[5] T. Ibukiyama, On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights , *Comment. Math. Univ. St.Paul.* **41** No2 (1992) 109-124.

[6] S. Hayashida and T. Ibukiyama, Siegel modular forms of half integral weights and a lifting conjecture, in preparation.

[7] T. Ibukiyam, Construction of half integral weight Siegel modular forms of $Sp(2, \mathbf{R})$ from automorphic forms of the compact twist $Sp(2)$. *J. reine angew. Math.*, 359:188–220, 1985.

[8] T. Ibukiyama, Siegel modular forms of half integral weight and Jacobi forms, Comm. Math. Univ. Sanct. Pauli, (1997)

[9] W. Kohnen, Modular forms of half integral weight on $\Gamma_0(4)$, *Math, Ann.* **248** (1980), 249-266.

[10] Y. Tanigawa, Modular descent of Siegel modular forms of half integral weight and an analogy of the Maass relation. Nagoya Math. J. 102 (1986), 51–77.

[11] R. Tsushima, On the dimension formula for the spaces of Siegel cusp forms of half integral weight and degree two, 京大数理研講究録 1052、「保型形式と整数論」研究集会報告集 (1999) pp. 47–52.

[12] R. Tsushima, On the dimension formula for the space of Jacobi forms of degree two, 京大数理研講究録 1103、「保型形式と L 関数の研究」研究集会報告集 (1999) pp. 96–110.

[13] H. Yoshida, Siegel modular forms and the arithmeticof quadratic forms, Invent. Math. 60(1980), 193–248.

[14] V. G. Zhuravrev, Euler expansion of theta transforms of Siegel modular forms of half integral weight and thier analytic properties, Math. Sbornik 123(165)(1984),174–194.

Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University, Machikaneyama 1-16, Toyonaka, Osaka,
560-0043 Japan.
email addresses:
ibukiyam@math.wani.osaka-u.ac.jp
hayasida@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp